Gewindekurven und ebene Kinematik

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 34, 1982,
S.39-45

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Gewindekurven und ebene Kinematik

Von **Hans Robert Müller,** Braunschweig

(eingegangen am 18. 5. 1982)

Die Ermittlung einer Gewindekurve k aus ihrem Grundriß k′ (Orthogonalprojektion in Richtung der durch den Punkt 0 gehenden Gewindeachse auf die durch 0 gehende Grundrißebene) stimmt im wesentlichen mit der Ermittlung des Flächeninhaltes jenes Sektors überein, den der Vektor $\overrightarrow{0X}$ überstreicht, wenn der Punkt X die Kurve k′ durchläuft. Werden die Grundrißkurven k′ als Bahnkurven eines ebenen Bewegungsvorgangs in der Grundrißebene aufgefaßt, so können Sätze und Betrachtungen um die Formel von J. STEINER auf Gewindekurven übertragen werden.

I

Ein *Strahlgewinde* oder *linearer Strahlkomplex* des dreidimensionalen projektiven Raumes wird durch das Nullsetzen einer linearen Form in PLÜCKERschen Geradenkoordinaten beschrieben. Dieses aus ∞^3 Geraden bestehende Gebilde der projektiven Geometrie kann metrisch bekanntlich auch als Gesamtheit der Bahnnormalen einer euklidischen Schraubung erklärt werden.

Bereits S. LIE [1] betrachtete glatte Raumkurven, deren sämtliche Tangenten einem Gewinde angehören. Diese *Gewindekurven* besitzen interessante Eigenschaften, wie z.B. daß die Schmiegebene in jedem Kurvenpunkt P sich mit der Bahnnormalebene des Punktes P bei dessen Verschraubung deckt. Man kann auch sagen: Der Punkt P und die Schmiegebene entsprechen sich in dem Nullsystem (involutorische Korrelation), das mit dem Strahlgewinde verbunden ist. Bekannte Beispiele von Gewindekurven sind die Raumkurven 3. Ordnung, die Schraublinien und die Kugelloxodromen, die auch Deutungen als nicht-euklidische Schraublinien zulassen.

Wählt man die z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems als Achse der zugrundegelegten Schraubung, so genügt im Punkte P die Fortschreitungsrichtung dx:dy:dz einer Gewindekurve der PFAFFschen Differentialgleichung

$$(1) \qquad x\,dy - y\,dx = c\,dz.$$

Hierbei ist $+c$ der Gewindeparameter und $-c$ der Schraubparameter: Ausgehend von einer Linksschraubung $c>0$ erhält man ein Rechtsgewinde und entsprechend Rechts-Gewindekurven.

Durch Integration obiger Differentialgleichung gelangt man zu Gewindekurven, etwa in der Weise, daß man zwei C^r-Funktionen $(r \geqq 1)$

$$t \longmapsto x(t), \quad t \longmapsto y(t), \quad t_0 \leqq t \leqq t_1$$

vorgibt und in (1) einsetzt. Durch Integration erhält man

$$\text{(2)} \qquad z = \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t} (x\,dy - y\,dx) + z_0.$$

Geometrisch entspricht dies der Vorgabe einer Kurve k′ in der Ebene $z=0$ als *Grundriß* der Gewindekurve k. Durch Variieren der Integrationskonstanten z_0 erhält man eine Schar von kongruenten Gewindekurven zur gleichen Grundrißkurve k′.

Der Integrand in (2) kann noch anders geschrieben und gedeutet werden:

$$x\,dy - y\,dx = \begin{vmatrix} x & dx \\ y & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & x+dx \\ 1 & y & y+dy \end{vmatrix}$$

Daraus ersieht man nach einer Formel der elementaren analytischen Geometrie, daß der Integrand gleich ist dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken 0, X, X+dX, wobei $X=\overrightarrow{0X}$ als Ortsvektor und entsprechend X+dX als Vektor zum Nachbarpunkt aufzufassen ist.

Somit kann

$$\text{(3)} \qquad \frac{c}{2}(z - z_0) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} (x\,dy - y\,dx) =: F_{\overrightarrow{0X}}$$

als Flächeninhalt des von dem Vektor $\overrightarrow{0X}$ überstrichenen (ausgefegten) Sektors gedeutet werden.

Setzen wir für die zum Grundrißpunkt X gehörende Höhendifferenz $Z_X := z - z_0$, so geht (3) über in

$$\text{(4)} \qquad \frac{c}{2} Z_X = F_{\overrightarrow{0X}}.$$

Satz 1: *Die Kote* Z_X *eines Punktes der Gewindekurve* k (*zum Grundrißpunkt* X *von* k′) *über dem Anfangspunkt von* k *wird bis auf den Faktor* $\frac{c}{2}$ *durch den Inhalt* $F_{\overrightarrow{0X}}$ *des von* $\overrightarrow{0X}$ *in der Grundrißebene überstrichenen Sektors dargestellt.*

II

In der Folge wollen wir nun die Ausgangskurve k′ in der Ebene $z=0$ als *Bahnkurve eines ebenen Bewegungsvorgangs* auffassen. Dies bedeutet für k′ keine Einschränkung, da jede ebene Kurve so erzeugt werden kann.

Hierzu denken wir uns die Ebene $z=0$ von den Ebenen E* und E doppelt überdeckt: Auf der *Rastebene* E* mit dem Achsenkreuz $\{0^*; x_1^*, x_2^*\}$ sei die *Gangebene* E beweglich angeordnet. E werde durch das Achsenkreuz $\{0; x_1, x_2\}$ erfaßt. Mit φ sei der *Drehwinkel* bezeichnet, durch den die beiden gleich orientierten Achsenkreuze gegeneinander verdreht sind. Im Folgenden mögen Vektoren als Spaltenvektoren geschrieben werden, nämlich im *Rastsystem* E^*:

$$\overrightarrow{0^*X} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{0^*0} = \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix}$$

und

im *Gangsystem* E:

$$\overrightarrow{0X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{00^*} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Mit der eigentlich orthogonalen Matrix

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

gilt dann für einen Punkt $X \in E$

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \Psi \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} = \Psi \cdot \begin{pmatrix} x_1 - u_1 \\ x_2 - u_2 \end{pmatrix}.$$

Im besonderen ist

$$\begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} = -\Psi \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Ein *Zwanglauf* E/E^* liegt nun vor, wenn φ und u_i $(i = 1, 2)$ Funktionen geeigneter Differentierbarkeitsordnung eines reellen Parameters t (Zeit) über einem gemeinsamen Definitionsbereich sind. Für die Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi$ sei $\dot\varphi := \frac{d\varphi}{dt} \neq 0$ vorausgesetzt. Vielfach ist es auch zweckmäßig, den Drehwinkel φ selbst als Parameter zu wählen. Kinematische Größen und Begriffe können nun in jedem der beiden von uns eingeführten Koordinatensysteme erfaßt und beschrieben werden; es empfiehlt sich hier, im System E zu rechnen.

Für den *Momentanpol* $P(p_1, p_2)$ ergibt sich (vgl. [2])

$$p_1 = u_1 + \frac{\dot u_2}{\dot\varphi} = u_1 + \frac{du_2}{d\varphi}, \quad p_2 = u_2 - \frac{\dot u_1}{\dot\varphi} = u_2 - \frac{du_1}{d\varphi},$$

wobei $d\varphi = \dot\varphi\, dt$ ist.

Die *Bahntangente* des in E festen Punktes X (*Führungsgeschwindigkeit* von X) kann in der Form

$$dx_1^* = -(x_2 - p_2)\, d\varphi, \quad dx_2^* = (x_1 - p_1)\, d\varphi$$

geschrieben werden. Hiermit gelangt man mittels (3) zu einer bereits G. DARBOUX [3] bekannten Inhaltsformel für den von $\overrightarrow{0^*X}$ überstrichenen Sektor:

(5) $$F_{\overrightarrow{0^*X}} = \frac{1}{2}\, \Phi\, (x_1^2 + x_2^2 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2) + F_{\overrightarrow{0^*0}}$$

mit $$\Phi = \int_{t_0}^{t} d\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0), \quad 2\, a_i\, \Phi = \int_{t_0}^{t} (p_i + u_i)\, d\varphi,$$

$$2\, F_{\overrightarrow{0^*0}} = \int_{t_0}^{t} (p_1u_1 + p_2u_2)\, d\varphi.$$

$F_{\overrightarrow{0^*0}}$ bedeutet den Inhalt des Sektors, der von $\overrightarrow{0^*0}$ überstrichen wird.

Satz 2: *Punkte* $X \in E$ *auf Kreisen um* $A(a_1, a_2)$ *führen zu gleich hohen Koten* Z_X *der erzeugten Gewindekurven* k.

III

Wir wählen nun in der Grundrißebene einen *geschlossenen Bewegungsvorgang* E/E^* mit der Periode $T > 0$ und der Drehzahl $\nu \neq 0$.

T ist dann die kleinste Zahl, für die

$$(6) \quad \begin{aligned} u_i(t+T) &= u_i(t), \quad (i = 1,2) \\ \varphi(t+T) &= \varphi(t) + 2\pi\nu \quad (\nu \text{ ganz}). \end{aligned}$$

Sieht man letztere Gleichung als Differenzengleichung an, so kann man sofort eine spezielle Lösung, nämlich

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{2\pi\nu}{T} t$$

angeben und erkennt durch Differenzbildung $\omega(t) := \varphi(t) - \hat{\varphi}(t)$, daß $\omega(t+T) = \omega(t)$, also $\omega(t)$ die Periode T besitzt. Somit hat $\varphi(t)$ die Gestalt

$$\varphi(t) = \omega(t) + \frac{2\pi\nu}{T} t.$$

Die Inhaltsformel (5) geht für einen geschlossenen Bewegungsvorgang in die nach J. STEINER [4] benannte Formel[1]) über:

$$(7) \quad F_X = \pi\nu\,(x_1^2 + x_2^2 - 2\,s_1\,x_1 - 2\,s_2\,x_2) + F_0$$

$$\text{mit} \quad \oint d\varphi = 2\pi\nu, \quad 2\pi\nu\,s_i = \oint u_i d\varphi = \oint p_i\,d\varphi,$$

$$2\,F_0 = \oint (p_1 u_1 + p_2 u_2)\,d\varphi.$$

F_X mißt den orientierten Inhalt der geschlossenen Bahnkurve k′ des Punktes $X \in E$, entsprechendes gilt für F_0 und die Bahnkurve k_0' von 0.

Gemäß (3) ist $\frac{c}{2}\left[z(t_0+T) - z(t_0)\right] = F_X$.

Da für die Durchlaufung von k′ die Wahl des Anfangspunktes (zum Wert t_0) keinen Einfluß hat, können wir

$$(8) \quad H = H_X := z(t+T) - z(t) = \frac{2}{c} F_X$$

als *Ganghöhe* der Gewindekurve k einführen. Diese Integralinvariante ist von t unabhängig und nimmt im *Steinerpunkt* $S(s_1, s_2)$ (Krümmungsschwerpunkt der Gangpol-

1) J. STEINER dürfte diese Formel wohl auch explizit gekannt haben, obwohl er sie, wie viele seiner Ergebnisse in ihren Konsequenzen verbal formulierte.

bahn) einen Extremwert an (Minimale Ganghöhe H_X, wenn $F_X > 0$). Da der Punkt A aus Satz 2 für den sich schließenden, d.h. geschlossenen Bewegungsvorgang E/E* in S übergeht, gilt

Satz 3: *Punkte* $X \in E$ *auf Kreisen um den Steinerpunkt* $S(S_1, s_2)$ *führen zu Gewindekurven gleicher Ganghöhe* H.

IV

Von besonderem Interesse sind *geschlossene Gewindekurven.* Für sie muß $H_X = 0$, d.h. $F_X = 0$ sein, was nicht immer reell erfüllbar ist.

Nach (7) muß dann

$$(9) \qquad (x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 = s_1^2 + s_2^2 - \frac{1}{\pi v} F_0 =: r_0^2 \geqq 0$$

sein; ausführlich lautet die Realitätsbedingung

$$\left[\oint u_1 \, d\varphi\right]^2 + \left[\oint u_2 \, d\varphi\right]^2 \geqq 2\pi v \oint (p_1 u_1 + p_2 u_2) \, d\varphi.$$

(9) ist die Gleichung eines Kreises k_0 der Gangebene E. Dieser *Nullkreis* hat seine Mitte in S, seine Punkte führen zu geschlossenen Gewindekurven. Wenn $r_0 = 0$, so ergibt sich nur für den *Steiner*punkt S eine geschlossene Gewindekurve – k_0 ist auf seine Mitte zusammengeschrumpft.

Auf einer Geraden der Gangebene E kann es somit höchstens zwei reelle Punkte geben, die geschlossene Gewindekurven erzeugen.

Zusammenfassend gilt

Satz 4: *Der Grundriß einer geschlossenen Gewindekurve (Projektion in Richtung der Gewindeachse auf eine senkrechte Ebene) berandet stets ein Gebiet von verschwindendem, orientierten Inhalt.*

Beispiele geschlossener Gewindekurven, die in Grund- und Aufrißdarstellungen diese Eigenschaft illustrieren, brachte W. WUNDERLICH (vgl. [5]).

V

Ergebnisse der ebenen Kinematik, die auf der *Steiner*formel (7) fußen, führen durch Übertragung auf Grund von (8) zu Sätzen und Formeln über Gewindekurven.

Für drei kollineare Punkte $A, B, X \in E$ folgert man leicht aus (7) (vgl. auch [2])

$$(10) \qquad F_X = \frac{1}{d} (b \, F_A + a \, F_B) - \pi v a b.$$

Hierbei gilt für die orientierten Streckenlängen: $\overline{AX} = a$, $\overline{XB} = b$, $\overline{AB} = a + b = d$.

Aus (8) folgt sofort für die Ganghöhen H_A, H_B, H_X der von den Punkten A, B, X erzeugten Gewindekurven

$$(11)\qquad H_X = \frac{1}{d}\,(b\,H_A + a\,H_B) - 2\pi\nu\,\frac{ab}{c}\,.$$

Die Berechnung der Ganghöhe H_X wird besonders einfach, wenn die Punkte A und B geschlossene Gewindekurven erzeugen

$$H_X = -\,2\pi\nu\,\frac{ab}{c}\,.$$

Die Polarform

$$F_{XY} = \pi\nu\,\left[x_1y_1 + x_2y_2 - s_1(x_1+y_1) - s_2(x_2+y_2)\right] + F_0$$

von (7) kann als *gemischter Bahnflächeninhalt* der Punkte X und Y angesprochen werden (vgl. [6]). Man bestätigt unmittelbar, daß auch

$$F_{XY} = \frac{1}{2}\,(F_X + F_Y - \pi\nu d^2)$$

mit

$$d^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

gilt. Das Verschwinden der Polarform $F_{XY}=0$ besagt, daß die Punkte X und Y bezüglich des Nullkreises k_0 konjugiert (polar) sind. Für die Ganghöhen H_X, H_Y der Gewindekurven, die aus einem solchen Punktepaar hervorgehen, gilt somit wegen (8)

$$H_X + H_Y = 2\pi\nu\,\frac{d^2}{c}\,.$$

VI

Formel (10) für drei Punkte einer Geraden von E läßt sich mit dem gleichen Aufwand auch für nicht geschlossene Bewegungsvorgänge E/E* herleiten. Für die Inhalte der ausgefegten Sektoren erhält man

$$(12)\qquad F_{\overrightarrow{0^*X}} = \frac{1}{d}\,(b\,F_{\overrightarrow{0^*X}} + a\,F_{\overrightarrow{0^*B}}) - \frac{1}{2}\,a\,b\,\Phi.$$

Zu zwei Gewindekurven k_A und k_B können wir nun in folgender Weise weitere Gewindekurven konstruieren: Unwesentlich ist ein Verschieben der Kurven in Richtung der Gewindeachse derart, daß die Anfangspunkte in die gleiche Höhe über der Grundrißebene zu liegen kommen. Als erstes suchen wir die Grundrisse k_A', k_B' und legen als Bewegungsvorgang E/E* die *Zweipunktführung* der Verbindungsstrecke der Anfangspunkte A_0, B_0 von k_A', k_B' zugrunde. Auf der Geraden A_0B_0 wählen wir einen Punkt X_0 und betrachten dessen Bahnkurve k_X' bei E/E*. Zu ihr suchen wir punktweise die zugehörige Gewindekurve k_X.

Die längs der Grundrißkurven k_A', k_B' bewegte Strecke A_0B_0 gelange in die Lage AB, der Punkt X_0 werde hierbei in die Position X mitgeführt. Der zugehörige Drehwinkel Φ ist durch die Drehung der bewegten Strecke bestimmt: $\Phi = \sphericalangle\, A_0B_0, AB$. Entsprechend (11) ergibt sich aus (4) und (12)

$$Z_X = \frac{1}{d}(b\,Z_A + a\,Z_B) - \frac{ab}{c}\,\Phi$$

und damit die Höhenkote eines Punktes von k_X.

Satz 5: *Aus zwei Gewindekurven, die nicht durch Schiebung in Richtung der Gewindeachse zur Deckung gebracht werden können, lassen sich weitere Gewindekurven konstruieren, die kollinearen Anfangspunkten in der Grundrißebene entsprechen.*

VII

Es bleibt noch kurz auf den Fall eines geschlossenen Bewegungsvorgangs E/E^* mit der Drehzahl $\nu = 0$ einzugehen. In (6) weist nun auch der Drehwinkel φ die Periode T auf. An die Stelle der *Steiner*-Formel (7) tritt (vgl. [2])

$$F_X = F_0 - (P_1 x_1 + P_2 x_2), \quad P_i = \oint p_i\, d\varphi \quad (i = 1, 2)$$

Für die Ganghöhe folgt mit (8)

$$H_X = H_0 - \frac{2}{c}(P_1 x_1 + P_2 x_2).$$

Satz 3 ist dahingehend abzuändern, daß Punkte auf parallelen Geraden der Richtung $-P_2 : P_1$ zu jeweils gleichen Ganghöhen führen. Unter ihnen befindet sich die stets reelle Nullgerade mit $H_X = 0$. Für drei Punkte einer Geraden ist entsprechend (10), (11)

$$F_X = \frac{1}{d}(b\,F_A + a\,F_B), \quad H_X = \frac{1}{d}(b\,H_A + a\,H_B).$$

Auf einer beliebigen Geraden der Gangebene E gibt es somit stets einen Punkt, der eine geschlossene Gewindekurve bestimmt.

Literaturverzeichnis

[1] S. LIE und G. SCHEFFERS: Geometrie der Berührungstransformationen. Teubner, Leipzig 1896.
[2] W. BLASCHKE und H.R. MÜLLER: Ebene Kinematik. Oldenbourg, München 1956.
[3] G. DARBOUX: Bull. sciences math. (2) **11** (1878), p. 337.
[4] J. STEINER: Gesammelte Werke. Berlin 1881/82.
[5] W. WUNDERLICH: Monatsh. Math. **92** (1981), p. 329–337. Anz. math. naturw. Kl. Österr. Akad. Wiss. (1981), Nr. 3.
[6] H. R. MÜLLER: Abhandl. Braunschw. Wiss. Ges. **29** (1978), p. 107–113.